

---

# Galios srautų paskirstymo ir optimalių kelių matematiniai modeliai monopolinėse elektros rinkose

---

**Antanas Nemura,  
Sigitas Kadiša,  
Artūras Klementavičius**

*Lietuvos energetikos institutas,  
Kompleksinių energetikos tyrimų  
laboratorija,  
Breslaujos g. 3, LT-3035 Kaunas*

Straipsnyje nagrinėjama galios srautų optimalių kelių problema elektros energetikos sistemos (EES) valdymo ir planavimo uždaviniuose monopolinės elektros rinkos sąlygomis. Apžvelgiami natūralaus, dispečerinio ir optimalaus galios srautų paskirstymo uždaviniai, jų santykis su srauto kelio parinkimu. Aptariama srauto optimalaus kelio sąvoka. Lyginami tinklo srautų uždavinio (transporto uždavinio) matematiniai modeliai EES uždaviniuose su klasikiais tiksliais ir suprastintais galios srautų paskirstymo matematiniais modeliais. Parodoma, dėl kurių priežasčių optimalių kelių uždavinys nebuvo sprendžiamas monopolinėse elektros rinkose.

**Raktažodžiai:** elektros energetikos sistema, galios srautas, optimalių kelių uždavinys, galios srautų pasiskirstymo matematinis modelis, monopolinė elektros rinka, tinklo srautų modelis, valdomi kintamieji

---

## 1. ĮVADAS

Elektros energijos perdavimas elektros tinklais yra elektros energetikos sistemų (EES) valdymo dalis. Iki šių dienų, t. y. monopolinės elektros rinkos sąlygomis, elektros perdavimo teorija buvo gerai iširta, o praktika – labai išplėtotą: elektros tinklai apraizgė visas šalis ir žemynus, visur įsitvirtino centralizuotas elektros tiekimas, o perdavimo tinklai (220–750 kV) daugelyje šalių pasiekė plėtros ribas [1].

Elektros perdavimo technologijos faktiškai nesikeitė jau 50 metų ir kelis paskutiniuosius neperžengė naujos kartos technologijų slenksčio [2]. Nors elektros tinklas yra tinklinė sistema, tačiau techninės galimybės nukreipinėti jame galios srautus norimais keliais buvo ir lieka ribotos. Keliu gali būti laikoma elektros linija, jungtis iš kelių linijų arba tranzitinė EES. Monopolinėse elektros rinkose EES dispečeriams ar režimo planuotojams nebuvo reikalo ieškoti elektros tinkle geriausių kelių srautams persiųsti – užtekdamo natūralaus srautų pasiskirstymo tinkle ar nedidelio jų perskirstymo, t. y. pakoregavimo dispečerinėmis EES valdymo priemonėmis.

Siekiant suskaičiuoti galios srautų paskirstymą ir pagerinti EES valdymą, buvo sukurta daug įvairių matematinių modelių [3]. Tik vienas kitas jų rėmėsi prielaida, kad dispečerio valdymo priemonės leidžia galios srautus persiųsti norimais keliais.

Šiuo metu elektros rinkos daugelyje šalių liberalizuojamos. Liberalizavimas atveria galimybes vartoto-

jui rinktis, iš kurio tiekėjo pirkti elektros energiją. Pirkimas įmanomas, jei vartotojas ir tiekėjas yra techniškai sujungti, t. y. prisijungę prie to paties elektros tinklo. Tokiomis sąlygomis gali iškilti optimalių kelių galios srautams persiųsti uždavinys. Todėl turėtų atsirasti naujų matematinių modelių EES valdyti ir galios srautams persiųsti liberalizuotose elektros rinkose. Tampa aktualu peržiūrėti ligšiolinius matematinius galios srautų paskirstymo modelius ir palyginti juos su minėtais negausiais modeliais su parenkamais srautų keliais tinkle.

## 2. NATŪRALUS SRAUTŲ PASISKIRSTYMAS

Kad galios srautai tekėtų elektros tinklu, reikia dviejų elementarių sąlygų: 1) kad egzistuotų tinklas kaip perdavimo infrastruktūra, terpė; 2) kad būtų iš ko perduoti ir kam perduoti.

Pirmąją sąlygą galima laikyti tinklo veiksnium, antrąją – energijos krypties veiksnium.

Tinklo veiksnys aprėpia tinklo topologiją (sujungimų schemą) ir parametrus, o antrasis – elektrines (galios šaltinius) ir vartotojų apkrovas. Natūralų (savaiminį) srautų pasiskirstymą tinkle galima apibūdinti pagal šiuos veiksnius.

a) **Tinklų veiksnys.** Elektros tinkle srautai pasiskirsto pagal specifinius fizikos dėsnius, atitinkančius elektromagnetinę tinklo prigimtį. Iš jų pagrindiniai yra Omo dėsnis, Kirchhofo srovių dėsnis (pirmasis Kirchhofo dėsnis) ir Kirchhofo įtampų dėsnis (antrasis Kirchhofo dėsnis). Šie dėsniai galioja tiek nuo-

latinės, tiek kintamosios srovės tinklams ar elektros grandinėms. Jie nulemia galios srautų kelius, t. y. jų dydžius atskirose linijose. Tariant perkeltine prasme, srautas „pats“ pasirenka sau tekėjimo kelius tinkle. Esant keliems lygiagrečiams keliams (elektros linijoms) srautas pasiskirsto juose tam tikru santykiu, arba, kraštiniu atveju, „pasirenka“ vieną kelią. Šis pasiskirstymas vyksta „mažiausio pasipriešinimo“ principu. Taigi, srautas „stengiasi“ pirmiausia tekėti ten, kur mažiausia varža (t. y. didžiausias elektrinis laidumas). Šis dėsniumas yra vienas srautų natūralaus pasiskirstymo (SNP) požymių.

b) **Energijos krypties veiksnys.** Vartotojų apkrovos ir elektrinių generuojamos galios nuolat keičiasi. Galios srautai teka iš elektrinių į tuos tinklo mazgus, prie kurių prijungti vartotojų įrenginiai, „suvartojantys“ šias apkrovas. Atvirkščia kryptimi, t. y. iš vartotojų į elektrines, srautai tekėti negali. Šis dėsniumas yra kitas srautų natūralaus pasiskirstymo požymis. Energijos perdavimo kryptį tinkle tuo pačiu laiko momentu gali būti daug. Jas lemia energijos vartojimo ir generacijos režimai.

Šiais dviem dėsniumais galima apibūdinti SNP esmę. Dar vienas SNP požymis – SNP yra nuostovusis (stacionarus) tinklo režimas. Regis, tikslesnė SNP sąvoka būtų *srautų savaiminis tekėjimas*.

Jei bet kurią EES laikysime struktūra iš 4 elementų – 1) vartotojų apkrovų, 2) generuojamų galių, 3) tinklo topologijos bei parametrų ir 4) srautų tinkle, tai 4-ąjį elementą – SNP – lems pirmieji 3 elementai. SNP apibendrintą modelį galima užrašyti taip:

$$\text{SNP} = \text{FUNKCIJA}_0 (\text{apkrovos; generacijos; tinklas}). \quad (1)$$

Srautas tinkle neatsiejamas nuo jo kelio, nes fizinio srauto be kelio nebūna. „Atpažinti“ SNP dažnai galima iš dviejų požymių: 1) srautas iš vieno mazgo į kitą teka ne tik trumpiausiu keliu, bet ir žiedu; 2) srautas iš vieno mazgo į kitą teka ne tik vienu keliu, bet ir jam lygiagrečiais keliais. Angliškai šie požymiai vadinami *loop flow* and *parallel load flow* ir vartojami kaip SNP atitikmenys.

### 3. DISPEČERINIS IR OPTIMALUS SRAUTŲ PASKIRSTYMAI

Elektros tinklo darbą galima apibūdinti kaip nenutrūkstamą SNP režimų virtinę. Keičiantis vartotojų apkrovoms ir į šiuos pokyčius atliepiant automatinėms generacijos valdymo sistemoms, srautai tinkle persiskirsto ir nusistovi naujas SNP.

Kartais teorijoje ir praktikoje SNP priešpastomas srautų dispečeriniam paskirstymui (SDP) arba optimaliam paskirstymui (SOP).

EES dispečeris gali perskirstyti natūralų srautų pasiskirstymą, keisdamas energijos perdavimo kryptis bei šiek tiek – tinklo topologiją ir parametrus. Tinkle nusistovi dispečerinio paskirstymo režimas, kuris kartu yra ir naujas natūralaus pasiskirstymo režimas. SDP dažnai reiškia naujus srautų kelius tinkle.

SOP yra vienas iš daugelio SDP režimų, apibūdinamas aukštesne EES režimo kokybe. Kokybės kriterijai gali būti įvairūs, pvz., galios nuostolių tinkle minimumas, generavimo išlaidų EES minimumas, didžiausias darbo patikimumas, mažiausias atjungiamų apkrovų dydis (angl. *load shedding*), tinklo apkrovų padengimas sunkesniais atvejais, t. y. leistino EES režimo išsaugojimas (angl. *load supply capability*) ir kt. Iki šiol dažniausiai buvo taikomi pirmieji du kriterijai. SOP (angl. *optimal load flow*) čia gali būti traktuojamas platesne prasme – kaip optimalus galių paskirstymas, t. y. ne tik kaip optimalūs srautai tinkle, bet ir kaip optimalios galios visoje EES (angl. *optimal power flow*, *optimal* arba *economic load dispatching*), įskaičiuojant ir generacijos galias elektrinėse.

SDP priemonės apima pirmiausia generacijos reguliavimo elektrinėse priemones, po jų – tinklo topologijos ir parametrų valdymo priemones, daug retesniais atvejais – vartotojų apkrovų reguliavimo priemones. EES valdymo teorijoje šie laisvai valdomi (reguliuojami) parametrai vadinami nepriklausomais (reguliuojamais) kintamaisiais [4–6], taip pat uždavinio laisvės laipsniais, režimo valdymo laisvės laipsniais.

Laikydami dispečerines ir automatines EES valdymo priemones 5-uoju EES elementu, galime užrašyti apibendrintą SDP modelį pagal analogiją su (1) modeliu:

SDP = FUNKCIJA<sub>1</sub> (apkrovos; generacijos; tinklas, valdymo priemonės),

$$\begin{aligned} \text{generacija} &= f_1 (\text{valdymo priemonės}), \\ \text{tinklas} &= f_2 (\text{valdymo priemonės}), \\ \text{apkrovos} &= f_3 (\text{valdymo priemonės}). \end{aligned} \quad (2)$$

Apibendrintą SOP modelį galima užrašyti tikslo funkcija, žyminčia režimo kokybę, pvz., išlaidas:

$$\begin{aligned} \text{SOP} &= \arg [\min \text{IŠLAIDOS (SDP)}], \\ \text{IŠLAIDOS} &= g_1 (\text{nuostoliai tinkle}) \text{ OR } g_2 (\text{generacija}) \text{ OR } g_3 (\text{generacija, nuostoliai tinkle}), \\ g_1 \text{ OR } g_2 \text{ OR } g_3 &= \text{FUNKCIJA}_2 (\text{SDP}); \end{aligned} \quad (3)$$

čia OR – loginis operatorius ARBA.

Srautų paskirstymas, t. y. srautai tinklo šakose, yra visų trijų modelių (1), (2), (3) sprendinys. Šie srautai yra priklausomi modelių kintamieji, nes jų reikšmės priklauso nuo valdomų, t. y. laisvai nusta-

tomų kintamųjų (generacijos, tinklo parametrų, apkrovų).

Visos EES iki XX a. paskutinio dešimtmečio (iki Europos energetikos chartijos priėmimo) buvo monopolinės elektros rinkos, kuriose elektros gamybą, perdavimą ir skirstymą dažniausiai valdė viena monopolija. Tokios monopolijos santykį su optimaliu galių paskirstymu galima apibūdinti taip: monopolinės rinkos tikslas yra optimalus galių paskirstymas (t. y. tas pats SOP).

Elektros rinkos liberalizavimas daugelyje Europos ir kai kuriose pasaulio šalyse kuria atviras konkurencines rinkas. Konkurencinės rinkos tikslas yra realizuoti elektros tiekėjo (gamintojo) ir pirkėjo (vartotojo) sandorius. Dispečeris turės į EES režimą „įterpti“ kuo daugiau sandorių. Tai iškelia kitą tikslą elektros perdavimo technologijų rinkai – sukurti naujų valdymo priemonių, kurios leistų dispečeriui galios srautus nukreipti keliais, turinčiais daugiau laisvos praleisties. Optimalus galių paskirstymas konkurencinėje rinkoje netenka ankstesnės svarbos: šį paskirstymą ima keisti srautų paskirstymas pagal rinkos sandorius.

#### 4. SRAUTŲ OPTIMALIŲ KELIŲ IR OPTIMALAUS PASKIRSTYMO SANTYKIS

Galios srauto optimalaus kelio sąvoka atsirado, bandant perkelti į elektros tinklą krovinių pervežimų uždavinio, dar vadinamo transporto uždaviniu, idėjas. Transporto uždavinyje pasirinktas pervežimų planas optimalus tada, kai suminės krovinių pervežimo išlaidos mažiausios. Pasirenkami optimalūs keliai – tokie, kuriais vežti yra pigiausia, t. y. paprastai sudarantys trumpiausią suminių kelių. Žodis „pasirinktas“ nurodo svarbiausią uždavinio ypatumą – galimybę pervežimų operatoriui rinktis kelių tinkle bet kurį pervežimo kelią, t. y. laisvai nukreipinėti krovinių srautus norimais keliais (maršrutais) [7]. Kelių parinkimas yra savarankiškas uždavinys, dar vadinamas minimalaus tinklo uždaviniu.

Galios srautas yra elektromagnetinis-fizikinis reiškinys, energijos rūšis ir savo prigimtimi iš esmės skiriasi nuo krovinių, kuris yra daiktas, fizinis kūnas. Dispečeris valdymo priemonėmis gali perskirstyti srautus atskirose šakose, bet neturi tokios pasirinkimo ir manevravimo laisvės kaip krovinių pervežimų operatorius. Pvz., dispečeriui yra sudėtinga nukreipti srautą pasirinkta linija, jei įtampa jos gale aukštesnė nei pradžioje, arba „įvaryti“ srautą į vieną liniją iš kelių lygiagrečių. Šis sunkumas yra galios SOP uždavinio ir krovinių pervežimo uždavinio pagrindinis skirtumas.

Kita vertus, krovinių pervežimui reikia išankstinio plano ar grafiko, antraip krovinyms nepasieks gavė-

jo, o elektros tinkle, priešingai, srautai pasieks vartotoją natūralaus pasiskirstymo principu. Krovinių pervežimas atskiruose kelio ruožuose turi aiškia ekonominę prasmę – išlaidas kuriai, kurios vienareikšmiai apibūdina kiekvieną kelio ruožą. Elektros tinkle panašią prasmę turėtų galios nuostoliai srauto kelyje (linijoje, ryšyje iš kelių linijų), tačiau ši prasmė nėra tokia aiški ir vienareikšmė. Taigi, antrasis minėtų uždavinių skirtumas yra tai, kad optimalus kelias siejamas su minimaliomis išlaidomis pervežimų uždavinyje ir nebuvo siejamas arba silpnai siejamas EES uždavinyje.

Dėl šių dviejų skirtumų srautų skirstymas optimaliais keliais elektros tinkle lig šiol savarankiškas uždavinys būdavo tik retais atvejais.

Srautų optimalaus paskirstymo uždavinyje (3) srautų keliai yra optimalūs tiek, kiek jie tenkina EES režimo minimalių išlaidų tikslus  $g_1$ ,  $g_2$  ar  $g_3$ . Šiame uždavinyje srautų keliai dispečerį ar režimų planuotoją domino nedaug – tiek, kiek gresia atskirų linijų ir ryšių perkrovimu ir avarijomis. Pereiti prie galios srautų optimalių kelių valdymo bus galima tik tada, kai dispečeris (operatorius) galės valdyti srautą panašiai kaip pervežimų operatorius, t. y. parinkti srautui kelią tinkle. Iš keleto pasirenkamų kelių vienas ir bus optimalus. Dispečeris kaip ekspertas turi intuityvų suvokimą, kiek vienas ar kitas kelias artimas optimaliam keliui pagal atitinkamą optimalumo kriterijų. *Kelias gali būti laikomas pasirinktą tada, kai jis yra dispečerio pasirinktas kelias pasirinkto dydžio srautui perduoti.*

Srauto pasirenkamo kelio matematinis modelis gali būti reiškiamas per srauto valdymo paklaidą  $\epsilon$ :

$$T_{\text{plan } ij} - T_{\text{fakt } ij} \leq |\epsilon|; \quad (4)$$

čia  $T_{\text{plan } ij}$ ,  $T_{\text{fakt } ij}$  – dispečerio planuojamas ir faktinis aktyviosios galios srautas kelyje (i, j). Taigi, „srauto kelias“ ir srauto kelyje galia, yra ekvivalenčios sąvokos, ir galima užrašyti tokį optimalaus kelio apibendrintą modelį:

$$\begin{aligned} \text{Pasirenkamas srautas} &= \text{Srautas pasirenkamame kelyje} \\ \text{Optimalus srautas} &= \text{opt (Pasirenkamas srautas)} \\ &\text{arba } \text{Optimalus srautas} = \text{Srautas optimaliame kelyje.} \end{aligned} \quad (5)$$

SOP uždavinyje (3) galima rasti ir atskirų reiškinų, priskirtinų būtent srautų optimalių kelių kategorijai:

(a) srautų dydžio „pakoregavimas“ reguliuojant reaktyviasias galias ir įtampas;

(b) sudėtingame, raizgiame tinkle (angl. *meshed network*) srautus galima nukreipinėti kitais keliais

įjungiant į tinklą arba atjungiant nuo jo atskiras šakas, t. y. keičiant dirbančio tinklo topologiją;

(c) nepageidautinu ar neleistinu laikytinas srauto kelias žemesnės įtampos linijomis, užuot tekėjus lygiagrečiu joms aukštesnės įtampos keliu;

(d) nuolatinės srovės pastotės laikytinas linijose leidžia valdyti srauto dydį, bet tokios pastotės dėl brangios keitiklinės įrangos buvo statomos retai ir siekiant kitų tikslų, nei reguliuoti srautą;

(e) projektavimo stadijoje srautui perdavimo kryptį buvo galima parinkti numatant statyti toje kryptyje naujas linijas, taigi keičiant būsimo tinklo topologiją;

(f) Europos Komisijos direktyva 90/574/EEC dėl elektros energijos tranzito reikalavo iš Sąjungos šalių užtikrinti privalomą elektros tranzitą, atsižvelgiant į technines perdavimo tinklų sąlygas. Tai pareikalavo pastangų iš vertikalčiai integruotų monopolijų ieškoti tranzito srautui techniškai leistino kelio tinkle, apeinant perkrautus kelius;

(g) eksporto–importo galios srautus iš vienos EES į kaimyninę EES kartais pavykdavo persiųsti optimaliais keliais, t. y. per tarp sistemine jungtį – kai su trečiosiomis EES minėtosios EES nebuvo sujungtos į žiedą, o persiunčiamo srauto dydis buvo reguliuojamas pagal elektros eksporto–importo sutartį.

Tardami, kad SOP uždaviniui galime priskirti ir EES režimo leistinumą tikslą, pvz., minimalią srautų nukrypimų nuo didžiausių leistinių sumą, tokį SOP uždavinį formaliai galime traktuoti kaip savarankišką srautų optimalių kelių uždavinį – apkrauti kelius srautais, artimais jų pralaidumui.

## 5. GALIOS SRAUTŲ PASKIRSTYMO KLASIKINIŲ IR TINKLO SRAUTŲ (TRANSPORTO) MATEMATINIŲ MODELIŲ PALYGINIMAS

Apibendrintieji galios srautų paskirstymo (1), (2) ir (3) modeliai yra principiniai, nes neaprašo funkcinių priklausomybių tarp modelio parametrų. Tokios priklausomybės aprašomos matematiniais modeliais. Juos sprendžiant, randami srautai tinkle. Šie modeliai gerai žinomi ir EES valdymo praktikoje taikomi seniai. Vieni jų aprašo srautų pasiskirstymą labai tiksliai, kiti, paprastesni – apytiksliai. Juos visus galima laikyti tradiciniais, klasikiniiais modeliais.

EES valdymo teorijoje žinoma keletas srautų optimalių kelių modelių, vadinamų tinklo srautų (transporto) matematiniais modeliais. Šie modeliai elektros sistemas valdančių monopolijų praktikoje nebuvo taikomi. Jų sprendinys taip pat yra srautai tinkle. Tai bendras abiejų tipų modelių požymis, dėl kurio įdomu juos palyginti.

Toliau palyginamos 5 klasikinių modelių (pavadintų M1–M5) ir 3 optimalių kelių modelių (pavadintų M6–M8) išraiškos, siekiant rasti jų panašumų ir skirtumų. Modelių sprendimo metodai nenagrinėjami. Visi modeliai skirti perdavimo tinklams. Klasikiniai galios srautų pasiskirstymo modeliai M1–M5 gali būti laikomi ir EES režimų modeliais, nors jie pateikiami be tikslo funkcijų, t. y. EES režimo optimalumo sąlygų, pvz., galių paskirstymo elektrinėms. Tai daroma todėl, kad optimalumo sąlygos gali būti įvairios, o srautų pasiskirstymas skaičiuojamas vienodai, nesvarbu, kokio EES režimo optimalumo siekiama. Tačiau optimalių kelių modeliai M6–M8 pateikiami su optimalumo sąlygomis, nes jos neatsiejamoms nuo srautų paskirstymo. Šie modeliai priklauso minimalaus tinklo uždavinių klasei ir gali būti laikomi ekonominiais srautų paskirstymo modeliais.

### Klasikinis kintamosios srovės galios srautų pasiskirstymo modelis (M1)

Tai tikslus galios srautų skaičiavimo modelis, kuris taikomas tinklo režimo ekonomiškesniam (nuostolių išlaidoms) nustatyti. Modelis formuluojamas kaip kintamosios srovės mazgų galių (angl. *power flow*, *node injection*) lygčių sistema kiekvienam EES mazgui [8].

$$P_i = V_i \sum_{j=1}^{N_{maz}} V_j [G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)], \quad (6)$$

$$Q_i = V_i \sum_{j=1}^{N_{maz}} V_j [G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)], \quad (7)$$

čia  $P_i$ ,  $Q_i$  –  $i$ -ojo mazgo aktyvioji ir reaktyvioji galia (apkrova);  $V_i$  –  $i$ -ojo mazgo įtampos modulis;  $\theta_i$  –  $i$ -ojo mazgo įtampos fazės kampas;  $G_{ij}$  – tinklo šakos ( $i, j$ ) laidumo realioji dalis (aktyvusis laidumas);  $B_{ij}$  – tinklo šakos ( $i, j$ ) laidumo menamoji dalis (reaktyvusis laidumas);  $N_{maz}$  – mazgų skaičius.

Šiose mazgų galių lygtyse galios  $P_i$  ir  $Q_i$  yra žinomi dydžiai, o sprendiniai – įtampos  $V_i$ ,  $V_j$  ir fazės kampai  $\theta_i$ ,  $\theta_j$ . Tik radus šiuos sprendinius, galima skaičiuoti srautų pasiskirstymą, t. y. galios srautus šakose  $P_{ij}$ ,  $Q_{ij}$ . Modelis tiksliai aprašo srautus, nes vertina reaktyviasias galias ir reaktyviuosius laidumus.

### Kintamosios srovės galios srautų pasiskirstymo modelis tinklui su kompensatoriais mazguose (M2)

Šis modelis taip pat yra klasikinis, tai modelio M1 modifikacija. Nuo pastarojo jis skiriasi tuo, kad vertinami srautai, tekantys per kompensatorius, prijung-

tus prie mazgų, o šakos tarp mazgų modeliuojamos vadinamąja  $\pi$  schema [9]. Galios srautai šakose aprašomi (8), (9) lygtimis, o mazgų galios – (10), (11) lygtimis:

$$P_{ij} = -V_i V_j Y_{ij \text{ ser}} \cos(\theta_i - \theta_j - \theta_{ij}) + V_i V_j (Y_{ij \text{ sh}} \cos(-\beta_{ij}) + Y_{ij \text{ ser}} \cos(-\alpha_{ij})), \quad (8)$$

$$Q_{ij} = -V_i V_j Y_{ij \text{ ser}} \sin(\theta_i - \theta_j - \theta_{ij}) + V_i V_j (Y_{ij \text{ sh}} \sin(-\beta_{ij}) + Y_{ij \text{ ser}} \sin(-\alpha_{ij})), \quad (9)$$

$$P_i = V_i V_i Y_i \cos(\gamma_i) + \sum P_{ij}, \quad (10)$$

$$Q_i = -V_i V_i Y_i \sin(\gamma_i) + \sum Q_{ij}; \quad (11)$$

čia  $Y_{ij \text{ ser}}, Y_{ij \text{ sh}}$  – šakos  $(i, j)$   $\pi$  schemos nuoseklus ir skersinio laidumo moduliai;  $\alpha, \beta$  – šakos  $(i, j)$   $\pi$  schemos nuoseklus ir skersinio laidumo elektriniai kampai;  $Y_i, \gamma_i$  –  $i$ -ojo mazgo kompensatoriaus laidumo modulis ir elektrinis kampas. Kiti pažymėjimai sutampa su ankstesniojo modelio (6), (7) pažymėjimais.

### Kintamosios srovės galios srautų pasiskirstymo suprastintas modelis (M3)

EES plėtros planavimo uždaviniuose skaičiuoti galios nuostolius tinkle dažnai nėra prasmės. Šiems uždaviniams pakanka daug mažesnio galios srautų pasiskirstymo tikslumo nei režimų planavimo uždaviniuose. Todėl klasikinis galios srautų modelis prastinamas, atmetant mažiau reikšmingus tinklo ir režimo parametrus. Z. Krišano ir bendraautorijų apžvelgtaime kintamosios srovės modelyje [10] nevertinami reaktyviosios galios srautai ir šakų aktyviosios varžos. Įtampų moduliai linijos pradžioje ir gale laikomi vienodi, todėl šakos įtampos vektorių trikampyje elektrinis kampas tarp vektorių  $\theta_1$ , išreikškus radianais, lygus įtampų kritimui šakoje santykiniais vienetais:

$$\theta_1 = I_{al} x_l / U_1 = P_1 x_l / U_1^2. \quad (12)$$

Pagal šiuos įtampų kritimus sudaromos įtampų kritimų uždaramė kontūre lygtys (antrasis Kirchhofo dėsnis), kurios kartu su galios srautų balanso lygtimis (pirmasis Kirchhofo dėsnis) sudaro visą modelį:

$$\sum_{l \in L_k} \frac{P_l x_l}{U_l^2} = 0 \quad \text{arba} \quad \sum_{l \in L_k} \Theta_l = 0, \quad (13)$$

$$\sum_{l \in L_n} P_l = P_n; \quad (14)$$

čia  $I_{al}, P_l$  – aktyvioji srovė ir aktyviosios galios srautas  $l$ -oje šakoje;  $x_l$  –  $l$ -osios šakos reaktyvioji varža;

$U_l$  – vidutinė  $l$ -osios šakos įtampa (modulių šakos pradžioje ir gale vidurkis);  $L_k$  –  $k$ -asis nepriklausomas kontūras tinklo schemeje;  $L_n$  – iš  $n$ -ojo mazgo išeinančių linijų skaičius,  $P_n$  –  $n$ -ojo mazgo galia.

Modelio sprendiniai yra aktyviosios galios srautai šakose  $P_l$ . Jei tinkle yra  $p$  šakų ir  $q + 1$  mazgų, tai lygčių (13) skaičius  $p-q$ , o lygčių (14)  $q$ . Spręsti šias lygtis yra daug paprasčiau, nei modeliuose M1 ir M2, nes nėra transcendentinių išraiškų, gautų iš kompleksinių parametru lygčių.

### Mazgų potencialų modelis (M4)

Konceptualia prasme modelis M3 yra skaidriai aiškus. Tačiau užrašant jį patogiu spręsti pavidalu, tenka įvesti porą naujų parametru, kurie, būdami sutartiniai, keičia modelį M3 į mažiau skaidrų modelį M4 [10]. Šie parametrai yra mazgų potencialai  $\theta_i$  ir šakų pralaidumai  $Y_{ij}$ . Išvestinis modelis M4 vadinamas mazgų potencialų modeliu.

Šios sąvokos apibrėžiamos taip. Iš  $q + 1$  mazgo vienas mazgas išskiriamas kaip bazinis (balansinis), ir kiekvieno kito ( $i$ -ojo) mazgo potencialu laikoma jo įtampos vektoriaus kampas  $\theta_i$  bazinio mazgo vektoriaus atžvilgiu. Bazinio mazgo potencialas lygus nuliui. Šakos pralaidumo sąvoka vartojama, Kirchhofo pirmąjį dėsnį (14) išreiškiant per antrąjį dėsnį (13):

$$P_i = \sum_{j=0}^q (U_{ij}^2 / x_{ij}) \theta_{ij} = 0. \quad (15)$$

Šakos  $(i, j)$  pralaidumu vadinamas pastovus koeficientas  $Y_{ij} = U_{ij}^2 / x_{ij}$ . Jis lygus aktyviosios galios srautui šakoje, esant 1 radiano mazgų potencialų skirtumui šakos galuose, t. y.  $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j = 1$ . Iš šių dviejų paskutinių išraiškų gaunama

$$-\theta_i Y_{ij} + \sum_{j=0}^q Y_{ij} \theta_j = P_i \quad (16)$$

arba, išreikškus matricų pavidalu,

$$Y \cdot \Delta = P; \quad (17)$$

čia  $P$  – mazgų aktyviųjų galių vektorius stulpelis;  $\Delta$  – mazgų potencialų vektorius stulpelis;  $Y$  – šakų pralaidumų matrica.

Čia ieškomi parametrai yra mazgų potencialai  $\theta_i$ . Juos radus iš (17), skaičiuojamas srautų pasiskirstymas šakose:

$$P_{ij} = Y_{ij} (\theta_i - \theta_j). \quad (18)$$

Mazgų potencialų modelis yra (17), (18). Galima pažymėti, kad mazgo potencialo sąvoka buvo taiko-

ma sovietinėje metodologijoje, o kitur pasaulyje naudota tiesioginė sąvoka – įtampos fazės kampas.

### Nuolatinės srovės galios srautų pasiskirstymo supaprastintas modelis (M5)

Nuo klasikinio kintamosios srovės modelio M1 prie nuolatinės srovės modelio pereinama, įtraukiant dažniausiai šias prielaidas [8] (žymėjimai kaip ir modelyje M1):

- $V_i \approx 1$  kiekvienam  $i$ ,
- $\sin(\theta_i - \theta_j) \approx \theta_i - \theta_j$ ,  $\cos(\theta_i - \theta_j) \approx 1$ ,
- $G_{ij} \approx 0$ .

Šios prielaidos tokios pačios kaip ir suprastintam kintamosios srovės modeliui M3. Šitaip iš (6) formulės gaunamos nuolatinės srovės mazgų galių lygtys:

$$P_i = \sum_{j=1}^{N_{maz}} B_{ij}(\theta_i - \theta_j), \text{ kai } i = 1, \dots, N_{maz}. \quad (19)$$

Matricų pavidalo (19) užrašoma:

$$P_{maz} = [A] [S] \theta; \quad (20)$$

čia  $P_{maz}$  – mazgų galių  $N_{maz}$ -matis vektorius-stulpelis;  $\theta$  – mazgų įtampų kampų  $N_{maz}$ -matis vektorius-stulpelis;  $[A]$  – mazgų  $N_{maz} \times N_L$  incidencijų matrica;  $[S]$  – šakų  $N_L \times N_{maz}$  incidencijų matrica.  $[S]$  matricos elementai  $s_{ij}$  turi laidumo prasmę:

$$s_{ij} = B_{ij} [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots -1 \ 0 \dots]. \quad (21)$$

(20) matricų lygties sprendiniai yra kampai  $\theta$ . Juos radus, ieškomi aktyviosios galios srautai linijoje  $P_l$ .

$$P_l = [S] \theta; \quad (22)$$

čia  $P_l$  – galios srautų šakose  $N_L$ -matis vektorius-stulpelis.

Matyti, kad pateiktasis nuolatinės srovės modelis M5 (20), (22) tiek parametrais, tiek struktūra sutampa su kintamosios srovės modeliu M4 ir taip pat vertina Kirchhofo 2-ąjį dėsnį. Modelis pateiktas perdavimo tinklų plėtros planavimo reikmėms. Pirmieji bandymai taikyti tokį modelį tinklų planavimo plėtrai siekia 1970 metus [11].

### Galios srautų pasiskirstymas pagal bendriausią tinklo srautų (transporto) modelį (M6)

Tinklo srautų (angl. *network flow*) modeliai, kurių kitas pavadinimas yra transporto (angl. *transportation*) modeliai, yra optimizaciniai. Jie naudojami optimizuoti produktų (srautų) pervežimo (perdavimo) tinklu išlaidas. Paprastai šie modeliai vertina tik

pirmąjį Kirchhofo dėsnį, todėl tikslumu neprilygsta nuolatinės srovės modeliams [12]. Tinklo srautų (transporto) modelis buvo pritaikytas krovinių išvežiojimui optimizuoti iš karto po tiesinio programavimo metodo sukūrimo. Pirmasis bandymas tinklo srautų modeliu spręsti elektros tinklo uždavinius, susijusius su galios srautais, minimas dar 1961 m. [13], tačiau praktiškai pritaikytas bene pirmą kartą buvo 1971 m.; tai buvo elektros tinklo plėtros uždavinys [14]. Gerai žinomas prof. R. Sullivan pritaikė jį tinklų patikimumo analizei [15]. Po kelerių metų (apie 1980 m.) modelis buvo pritaikytas optimaliam srautų paskirstymui elektros sistemoje nevertinant perdavimo nuostolių [16], o vėliau tų pačių autorių – ir minimizuojant šiuos nuostolius [17]. Visuose šiuose darbuose srautų pasiskirstymas aproksimuotas nuolatinės srovės srautais. Bandyta pritaikyti modelį net ir kintamosios srovės galios srautų pasiskirstymui skaičiuoti [18].

Bendriausias tinklo srautų modelis užrašomas taip [19]:

$$F = \sum_{i=1}^M C_i T_i, \quad (23)$$

$$\sum_{k \in \Omega_j} T_k = P_j. \quad (24)$$

$$-T_{i \max} \leq T_i \leq T_{i \max}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad (25)$$

čia  $M$  – šakų skaičius;  $N$  – mazgų skaičius;  $C_i$  – vienetinės išlaidos  $i$ -ojoje šakoje, paprastai proporcingos šakos reaktyviajai varžai;  $T_{i \min}$ ,  $T_{i \max}$  –  $i$ -osios šakos pralaidumo ribos;  $\Omega_j$  – prie  $j$ -ojo mazgo prijungtų šakų aibė. Tikslumo funkcija (23) yra tiesinė, o vertinamas tik Kirchhofo pirmasis dėsnis (24). Modelis vertina pralaidumo ribojimus (25) ir tuo yra artimesnis realiam objektui nei nuolatinės srovės modeliai. Tačiau tikslumu jis neprilygsta nuolatinės srovės modeliams, įvertinantiems ir antrąjį Kirchhofo dėsnį.

Vienetinės išlaidos  $C_i$  turi galios srauto kainos prasmę, pvz., USD/MW. Srauto kaina gali būti įvairių rūšių. Tinklų režimų uždavinyje tai būtų srauto nuostolių kaina. Tinklų plėtros uždavinyje tai būtų investicijos linijai statyti galios srauto vienetui. Tokio uždavinio pavyzdyje vienetinės išlaidos  $C_i$  iš (23), USD/MW, turi šią išraišką [19]:

$$C_i = K_i L_i / T_{i \max}; \quad (26)$$

čia  $K_i$  – investicijos  $i$ -os linijos ilgio vienetui;  $L_i$  –  $i$ -os linijos ilgis;  $T_{i \max}$  –  $i$ -os linijos pralaidumas.

Apžvalginio darbo [19] autoriai daro išvadą, kad supaprastintas tinklo srautų modelis M6 priimtinas ta-

da, kai nereikia tikslų generacijos grafikų bei srautų pasiskirstymo duomenų ir pirmiausia – EES plėtros planavimo uždavinyje, įskaitant ir generavimo šaltinių plėtrą. Modeliavimo tikslumas yra geresnis radialiniams ir tankiems tinklams.

Kituose darbuose bandoma pagerinti šį bendriaušią tinklo srautų modelį M6, įtraukiant į jį Kirchhofo įtampų dėsnį.

### Tinklo srautų „mažiausio pasipriešinimo“ modelis (M7)

A. Monticelli's su bendraautorais suformulavo tinklo srautų modelį, kuriame Kirchhofo įtampų dėsnį įtraukė į netiesinę tikslo funkciją [20]. Modelis skiriamas optimaliam galios srautų paskirstymui eksploatacijos uždavinyje ir grindžiamas „mažiausio pasipriešinimo“ (angl. *least efforts*) kriterijumi, kuris atitinkąs minėtąjį dėsnį. Pagal šį kriterijų kiekvienai šakai priskiriama kvadratinė išlaidų funkcija. Šio modelio išraiška:

$$\text{Min } Z = 1/2 \text{ T}^t \text{ XT}, \quad (27)$$

$$\text{AT} = \text{P}; \quad (28)$$

čia X – diagonalinė reaktyviųjų varžų matrica; T – šakų srautų matrica; A – mazgų ir šakų incidencijų matrica. Išlaidos vertinamos laipsnio rodikliu  $t$ . Modelis (27), (28) sprendžiamas įvedant Lagranžo funkciją, t. y. klasikinės optimizacijos būdu:

$$\text{L}(\text{T}, \lambda) = 1/2 \text{ T}^t \text{ XT} + \lambda^t (\text{P} - \text{AT}); \quad (29)$$

čia  $\lambda$  – N-matis Lagranžo daugiklių vektorius; N – mazgų skaičius. Diferencijuojant (29) lygtį pagal T ir  $\lambda$  randami sprendiniai T ir  $\lambda$ .

Darbuose [21, 20] šis modelis lyginamas su nuolatinės srovės modeliu, užrašytu:

$$\text{P} = \text{B} \theta, \quad (30)$$

$$\text{T}_i = (\theta_k - \theta_l) / X_i; \quad (31)$$

čia P, B,  $\theta$  – mazgų aktyviųjų galių, šakų menamųjų laidumų ir mazgų įtampų vektorių kampų matricos;  $\text{T}_i$  – aktyviosios galios srautas  $i$ -ojoje šakoje;  $X_i$  –  $i$ -osios šakos reaktyvioji varža;  $\theta_k - \theta_l$  –  $i$ -osios šakos mazgų  $k$  ir  $l$  įtampų kampų skirtumas. Modelis (30), (31) visiškai sutampa su M5.

Lyginant modelio (27), (28) sprendinius su modelio (30), (31) sprendiniais, gaunama, kad  $\lambda = \theta$ , o tai ir yra modelių ekvivalentiškumo įrodymas. Šiai ekvivalentiškumo sąlygai yra būtina prielaida, kad galios srautai šakose gali būti bet kokio dydžio. Šio palyginimo išvada įdomi tuo, kad randamos sąlygos,

kai nuolatinės srovės modelis kaip imitacinis modelis gali būti ekvivalentus tinklo srautų modeliui kaip optimizaciniam modeliui.

### Tinklo srautų (transporto) modelis su tiesioginiu ribojimu pagal Kirchhofo įtampų dėsnį (M8)

Darbe [21] buvo pasiūlytas optimalaus aktyviųjų galių paskirstymo modelis, alternatyvus modeliui M7. Jame antrasis Kirchhofo dėsnis vertinamas ne tikslo funkcijos sudėtyje o kaip papildomas tiesioginis ribojimas (tiesinė lygtis (29)):

$$\text{Min } F(\text{P}, \text{T}), \quad (32)$$

$$\sum_{k \in \Omega_j} T_k = P_j, \quad (33)$$

$$\sum_{k \in \Delta \ell} X_k T_k = 0, \quad (34)$$

$$-T_{k \max} \leq T_k \leq T_{k \max}, \quad (35)$$

$$P_{j \min} \leq P_j \leq P_{j \max}, \quad j = 1, \dots, N, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad k = 1, \dots, M; \quad (36)$$

čia  $F(\text{P}, \text{T})$  – išlaidų funkcija, susijusi su mazgų galiomis P ir šakų srautais T;  $X_k$  –  $k$ -os šakos reaktyvioji varža;  $\Delta \ell$  – aibė šakų, priklausančių  $l$ -ajam nepriklausomam kontūriui. Funkcija (32) būna tiesinė režimo leistinumui, taip pat apkrovų minimalaus atjungimo uždaviniuose ir netiesinė patikimumo ir galių paskirstymo sistemoje uždaviniuose. Kirchhofo įtampų dėsnio lygtis (34) gali būti laikoma „griežtu“ ribojimu, palyginti su „laisvu“ ir „netiesioginiu ribojimu“ tikslo funkcijos sudėtyje (27).

Modelis M8, skirtingai nei M7, ekvivalentus nuolatinės srovės modeliui M5 ir su ribojimais srautams šakose. Darbo [21] autoriai pažymi, kad sprendžiant modelį sunkumų sukelia nepriklausomų kontūrų išskyrimas tinklo schemeje. Modelį jie patikrino 24 mazgų etaloninei IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) schemei ir nustatė, kad modelis esąs tikslesnis nei „mažiausio pasipriešinimo“ modelis M7, nes atsižvelgiama į šakų pralaidumo ribotumą.

### Galios srautų paskirstymo klasikinių ir tinklo srautų (transporto) matematinų modelių palyginimas

Klasikiniuose galios srautų paskirstymo modeliuose (M1–M5), taikomuose SNP, SDP, SOP uždaviniams, srautai šakose yra priklausomieji modelio kintamieji. Jie priklauso nuo laisvai valdomų (nepriklausomų)

mųjų) kintamųjų – generuojamų galių, tinklo parametrų, apkrovų.

Srautų optimalių kelių paieška tampa savarankišku srautų paskirstymo uždaviniu, jeigu konkrečioms keliamis siekiama priskirti tam tikro dydžio srautus. Todėl modeliuose M6–M8 srautai šakose yra nepriklausomi, laisvai valdomi kintamieji, nuo kurių priklausomais tampa generuojamos galios, tinklo parametrai ir vartotojų apkrovos. Vadinasi, M1–M5 ir M6–M8 modeliuose nepriklausomi ir priklausomi kintamieji susikeičia vietomis.

Taigi, tinklo srautų (transporto) modelis yra paprasčiausias klasikinio srautų pasiskirstymo modelio prastins (aproksimacija). Bendriausias modelis dėl netikslumo vargiai gali būti taikomas vienas, be sąveikos su kitais modeliais. Pasiūlytieji patobulinti tinklo srautų modeliai nebuvo tikrinami ir tiriami modeliavimo praktikoje. Galima tikėtis, kad šie modeliai konkurencinėse elektros rinkose patobulės, atsirandant tiek naujos kartos elektros perdavimo technologijoms, tiek ir plačiau taikant žinomas retesnes srautų valdymo priemones. Tada jie įgytų praktinę vertę dispečeriams ir režimų planuotojams.

## 6. IŠVADOS

1. Apžvelgti galios srautų paskirstymo (GSP) perdavimo tinkle apibendrintieji modeliai – natūralaus srautų pasiskirstymo, dispečerinio perskirstymo ir optimalaus paskirstymo. Aptarta jų santykis su galios srautų kelių parinkimu tinkle. Monopolinėse elektros rinkose pagrindinis elektros energetikos sistemų valdymo uždavinys buvo optimalus galių paskirstymas sistemoje. Kelio parinkimas srautui tekėti tinkle savarankišku uždaviniu būdavo tik retais atvejais, bet atskirų kelio parinkimo reiškinį būta daug.

2. Aptariama galios srauto optimalaus kelio sąvoka. Siūloma optimaliu keliu laikyti vieną iš dispečerio laisvai pasirenkamų kelių, tenkinančių optimalumo kriterijaus sąlygą.

3. Aptarti pirmieji bandymai perkelti krovinių pervežimo uždavinio (minimalaus tinklo uždavinio, optimalių kelių uždavinio) idėjas į GSP uždavinį. Šitaip prieš 30–15 metų buvo sudaryti elektros energetikos sistemos tinklo srautų (transporto) uždavinių matematiniai modeliai. Jie grindžiami prielaida, kad galios srauto kelias tinkle gali būti valdomas. Palyginus tokius matematinius modelius su klasikiniais (tiksliais) kintamosios srovės GSP modeliais bei suprastintais kintamosios bei nuolatinės srovės modeliais pastebėta, kad tinklo srautų modeliuose srauto kelias (t. y. srauto dydis kelyje) yra nepriklausomas modelio kintamasis, generacijos ir tinklo parametrai – priklausomieji kintamieji, o klasikinuose ir suprastintuose modeliuose yra priešingai. Bendriausias tinklo srautų modelis nevertina Kirchhofo įtampų dėsnio. Šį trūkumą buvo bandyta įveikti, įvedant tą

dėsnį į modelio tikslo funkciją arba įvedant tiesiogiai į modelį kaip papildomus ribojimus. Šitaip išplėstas bendriausias tinklo srautų modelis tampa ekvivalentišku nuolatinės srovės modeliams.

4. Tinklo srautų modeliai (minimalaus tinklo modeliai) monopolinėse elektros rinkose nebuvo taikomi, nes elektros fizikos dėsniai neleido dispečeriams laisvai valdyti srauto kelio, nebuvo kuriama veiksmingų techninių priemonių srautų keliamis valdyti monopolinėse rinkose, ir trūko stiprių akstinių valdyti srautų kelius, kai elektros gamyba ir perdavimo tinklas buvo tos pačios monopolijos žinioje. Kita vertus, šie modeliai nebuvo pakankamai patikimi ir išbandyti įvairioms schemoms.

Gauta  
2001 04 03

## Literatūra

1. Bush R. *Will gas be our Nemesis or our Saviour?* Transmission and Distribution. October, 2000.
2. Palm Kufahl. A look back... A look forward. Transmission and Distribution. November, 1999. P. 102–112.
3. Huneault M. Galliana F. D. A Survey of the optimal power flow literature. IEEE Transaction on Power Systems. May 1991. Vol. 6, N 2. P. 762–770.
4. Крум Л. А. Методы оптимизации при управлении электроэнергетическими системами. Новосибирск, 1981. 320 с.
5. Nemura A. Elektros energetikos sistemų matematinio modeliavimo ir valdymo problemų tyrimai // Energetika. 1997. Nr. 3 P. 7–17.
6. Немура А., Паулаускас М. Математические и логико-лингвистические модели для информационного обеспечения АСДУ ЭЭС // Energetika. 1992. Nr. 2. P. 3–19.
7. Čiočys V., Jasilionis R. Matematinis programavimas. Vilnius, 1990. 304 p.
8. Kern J. Kim, Young M. Park, Kwang Y. Lee. Optimal Long Term transmission Expansion Planning based on Maximum Principle. IEEE Transaction on Power Systems. November 1988. Vol. 3, N 4. P. 1494–1501.
9. Torsten Cegrell. Power System Control Technology. Prentice-Hall International (UK) Ltd. London, 1986. 342 p.
10. Далев В. А., Кришан З. П., Паэгле О. Г. Динамические методы анализа развития сетей энергосистем. Рига, 1979.
11. Kaltenbach J. C., Peschon J., Gehrig E. H. A mathematical optimization technique for the expansion of electrical power transmission systems. IEEE Trans. Power Appar. & Syst. January 1970. Vol. PAS-89. P. 113–119.
12. Clements K. A., Ejebe G. C., Wollemborg B. F. Linear Programming vs. Network Flow Methods Applied to Bilk Power Supply Adequacy Assessment. IEEE PES Winter Meeting. New York. 1978. Paper A78 062–2.
13. Cooper W. W., Charnes A. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. Wiley, 1961. Vol. 2, Ch.17.

14. Garver L. L., Transmission Network Estimation Using Linear Programming. IEEE Transaction on PAS-89. 1970. P. 1688–1696.
15. Sullivan R. L. Power System Planning. McGraw-Hill, Inc. New York, 1977.
16. Lee T. H., Thorne D. H., Hill E. F. A Transportation Method for Economic Dispatching-Application and Comparison. IEEE Transaction on PAS-99. 1980. P. 2373–2382.
17. Luo J. S., Hill E. P., Lee T. H. Power System Economic Dispatch Via Network Approach. IEEE Transaction on PAS-103. 1984. P. 1242–1248.
18. Barras J., Alec S., Pasche C., Chamorel P. A. Network Simplex Method Applied to AC Load-Flow Calculation. IEEE/PES Summer Meeting. Mexico; 1986. Paper 86, SM 336–2.
19. Padiyar K. R., Shanbhag R. S. Comparison of Methods for Transmission System Expansion Using Network Flow and DC Load Flow Models. Electrical Power & Energy Systems. January 1988. Vol. 10, No. 1. P. 17–24.
20. Monticelli A., A. Santos Jr., Pereira M. V. et al. Interactive Transmission Network Planning Using a Least-Effort criterion. IEEE Transaction on PAS-101. 1982. P. 3919–3924.
21. Carvalho M. F., Soares S., Ohishi T. Optimal Active Power Dispatch by Network Flow Approach. IEEE Transaction on Power Systems. November 1988. Vol. 3, N 4. P. 1640–1647.

**Antanas Nemura, Sigitas Kadiša, Artūras Klementavičius**

**MATHEMATICAL MODELS OF LOAD FLOW AND OPTIMAL PATHS IN NON-COMPETITIVE POWER MARKETS**

**S u m m a r y**

The issues of optimal paths of load flow in the power system control and planning problems in the period of non-competitive (closed) power market are analysed. The problems of uncontrolled load flow (loop flow, parallel load flow), dispatched load flow and optimal load flow are

compared according to their association to flow path choice. The concept of optimal path of flow is introduced. The network flow (*i.e.* transportation) mathematical models previously proposed for power system problems are compared to traditional load flow models, both accurate and approximative ones, and the main differences are outlined. The barriers for the practical application of optimal flow problems in the historical period of non-competitive power market are identified.

**Key words:** power system, optimal load flow, optimal path of load flow, mathematical model, non-competitive power market, network flow model, independent variables

**Антанас Немура, Сигитас Кадиша,  
Артурас Клементавичюс**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНЫХ ПУТЕЙ ПОТОКОВ МОЩНОСТИ В МОНОПОЛИСТИЧЕСКОМ РЫНКЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ**

**Р е з ю м е**

В статье рассматривается проблема оптимальных путей для потоков мощности в задачах управления и планирования электроэнергетических систем (ЭЭС) в условиях монопольного рынка электроэнергии. Анализируются задачи натурального, диспетчерского и оптимального распределения потоков мощности, их отношение к выбору пути потока. Определяется понятие оптимального пути потока. Сравняются оптимизационные модели сетевых потоков (транспорта) для задач ЭЭС с классическими точными и упрощенными математическими моделями распределения потоков мощности. Выявлены факторы, которые затрудняли применение задачи оптимальных путей потоков в ЭЭС в условиях монопольного рынка электроэнергии.

**Ключевые слова:** электроэнергетическая система, поток мощности, оптимальный путь, математическая модель потокораспределения, монопольный рынок электроэнергии, модель сетевых потоков, независимые переменные