

Reaktoriaus modelio, kuriame vėlavimas priklauso nuo galios, sprendinių stabilumas

Kostas Bučys

Klaipėdos universitetas,
Matematikos katedra,
H. Manto g. 84, LT-92294 Klaipėda
El. paštas: bucysk@one.lt

Straipsnyje iš bazinio branduolinio reaktoriaus dinamikos matematinio modelio išskirta jo modifikacija, kuri aprašoma viena paprasta diferencialine lygtimi su vėlavimu, priklausančiu nuo reaktoriaus galios. Nagrinėjami šios lygties sprendinių stabilumo klausimai: tiesinė analizė atlikta D-skaidymo metodu, o netiesinė – remiantis bifurkacijų teorija. Sukonstruotas lygties artutinis periodinis sprendinys ir atliktas skaitinis eksperimentas.

Raktažodžiai: branduolinis reaktorius, diferencialinė lygtis, vėlavimas, periodinis sprendinys, modelis, šaknis

1. ĮVADAS

Branduolinių reaktorių darbo stacionarių režimų stabilumas yra tokia charakteristika, kuri apibrėžia reaktoriaus darbingumą ir galimybę jį normaliai eksploatuoti [1]. Todėl šiai problemai skiriama daug dėmesio. Branduoliniai reaktoriai yra objektai su pasiskirsčiusiais parametrais, todėl pakankamai griežti jų matematiniai modeliai aprašomi netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis su dalinėmis išvestinėmis arba esant tam tikriems papildomiems supaprastinimams – lygtimis su vėluojančiu argumentu [2, 3]. Stabilumo ir autosvyravimų sistemose su pasiskirsčiusiais parametrais ir sistemose su vėlavimu bifurkacijų teorija išplėta darbuose [4–6]. Išskirto branduolinio reaktoriaus matematinio modelio modifikacijos artutinio periodinio sprendinio stabilumas buvo nagrinėtas darbe [6]. Šio **straipsnio tikslas** – D-skaidymo metodu atlikti gautos lygties tiesinę analizę ir nustatyti jos sprendinių asimptotinio stabilumo sritį D_0 ir sritį D_2 , kurioje atsiranda vieno dažnio stabilus periodinis sprendinys. Remiantis bifurkacijų teorija, sukonstruoti modelio artutinį stabilų periodinį sprendinį ir jį palyginti su atlikto skaitinio eksperimento rezultatais.

2. BRANDUOLINIO REAKTORIAUS DINAMIKOS MODELIS

Branduolinio reaktoriaus dinamikos taškinį modelį, kuriame atsižvelgta į vėluojančių neutronų įtaką ir į vidinį grįžtamąjį ryšį, sudaro dviejų diferencialinių lygčių su vėlavimais sistema [7]:

$$\dot{N}(t) = r_N \cdot \left[1 + a \left(1 - \frac{C(t)}{C_0} \right) - \frac{N(t-h_N)}{N_0} \right] \cdot N(t), \quad (1)$$

$$\dot{C}(t) = r_C \cdot \left[\frac{N(t)}{N_0} - \frac{1}{C_0} \sum_{j=1}^6 \alpha_j C(t-h_j) \right] \cdot C(t); \quad (2)$$

čia r_N – neutronų tankio tiesinio augimo koeficientas; r_C – vėluojančių neutronų tiesinio augimo koeficientas; a ($-1 < a \leq 0$) – reaktoriaus galią reguliuojantis mažas parametras; $N(t)$ – visų neutronų tankis (reaktoriaus galia) laiko momentu t ; N_0 – jo stacionari reikšmė; $C(t)$ – vėluojančių neutronų (branduolių pirmtakų) suminis tankis laiko momentu t ; C_0 – jo stacionari reikšmė; $h_N > 0$ – vėlavimas, atspindintis trikdžius grįžtamojo ryšio grandinėje „galia–reaktyvumas“; $h_j > 0$ – vėlavimas, reiškiantis vėluojančių neutronų j -osios grupės generacijos laiką (skilimo pusperiodį $T_{1/2}$); $\alpha_j = \beta_j / \beta$ – vėluojančių neutronų santykinė išėiga ($\sum_j \alpha_j = 1$).

Tarkime, kad branduoliniame reaktoriuje vyksta lėti procesai su vėluojančiu grįžtamoju ryšiu. Jei vėluojančių neutronų įtakos nepaisoma, tai branduolinio reaktoriaus matematinis modelis (1), (2) užrašomas viena logistine lygtimi su vėlavimu [6]:

$$\dot{N}(t) = r \cdot \left[1 - \frac{N(t-h)}{N_0} \right] \cdot N(t); \quad (3)$$

čia $r = r_N$ – neutronų tankio tiesinio augimo koeficientas; $h = h_N > 0$ – vėlavimas, perduodantis trikdžius grįžtamojo ryšio grandinėje „galia–reaktyvumas“. Kiti pažymėjimai kaip ir modelyje (1), (2).

Vėlavimas grįžtamojo ryšio grandinėje nėra pastovus dydis, bet priklauso nuo reaktoriaus galios $N(t)$ [1, 2, 6]. Todėl vietoje (3) lygties nagrinėsime modelį, aprašomą lygtimi

$$\dot{N}(t) = r \cdot \left[1 - \frac{N(t - \Delta(N(t)))}{N_0} \right] \cdot N(t). \quad (4)$$

Priklausomybę Δ nuo $N(t)$ parinksime šitokią:

$$\Delta(N) = h \exp \left[a \cdot \left(1 - \frac{N}{N_0} \right) \right]. \quad (5)$$

Toks vėlavimo (5) parinkimas nėra atsitiktinis, o turi fizikinę prasmę. Reaktoriaus galiai $N(t)$ didėjant, vėlavimas $\Delta(N)$ mažėja, o galiai mažėjant – didėja [5, 6]. Iš (5) išplaukia $0 < \Delta(N) \leq h$.

3. TIESINĖ ANALIZĖ

Lygtis (4) turi dvi pusiausvyros būsenas, t. y. $N(t) \equiv 0$ ir $N(t) \equiv N_0$. Pirmoji iš jų yra nestabili. Antrosios pusiausvyros būsenos stabilumui tirti (4) lygtyje darome keitinį

$$N(t) = N_0 \left[1 + x \left(\frac{t}{h} \right) \right] \quad (6)$$

ir gauname diferencialinę lygtį

$$\dot{x}(t) + rh[1 + x(t)]x[t - \exp(-ax(t))] = 0, \quad (7)$$

kuriuos tiesinės dalies būdingasis kvazipolinomas yra

$$P(\lambda) \equiv \lambda + rh \exp(-\lambda) = 0. \quad (8)$$

Mus domina atvejis, kada (8) lygtis turi dvi vien menamas šaknis, o kitų šaknų realiosios dalys yra neigiamos. Todėl atliksime D -skaidymą [5] $a = rh$ parametro atžvilgiu.

Kvazipolinomas

$$P(\lambda, a) = \lambda + a \exp(-\lambda) \quad (9)$$

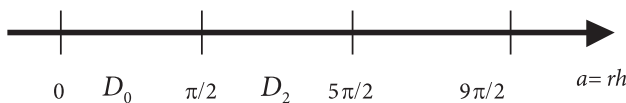
turi šaknį $\lambda = 0$, kai $a = 0$. Toliau sakykime, kad (9) kvazipolinomas turi vien menamą šaknį $\lambda = i\sigma$. Tada iš (8) gauname

$$i\sigma + a(\cos \sigma - i \sin \sigma) = 0, \quad (10)$$

arba

$$\cos \sigma = 0, \quad \sigma = a \sin \sigma.$$

Iš čia pastebime, kad (9) kvazipolinomas turi tik menamas šaknis, kai $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. Visa a tiesė pasidalija į tokius intervalus (1 pav.):



1 pav. D -skaidinys

1 teorema. Jei $0 < a = rh < \frac{\pi}{2}$, tai visoms (8) lygties šaknims galioja $\text{Re} \lambda < 0$ [6].

Išvada. Intervalas $(0; \frac{\pi}{2})$ yra (4) lygties pusiausvyros būsenos $N(t) = N_0$ asimptotinio stabilumo sritis D_0 .

Toliau nagrinėsime, kaip kinta (8) kvazipolinomo šaknys pereinant per tašką $a = rh = \frac{\pi}{2}$ iš intervalo $(0; \frac{\pi}{2})$ į intervalą $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$. Tarkime, $a = rh = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$; čia $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ir ε_0 – mažas.

Nagrinėsime kvazipolinomą

$$P(\lambda, \varepsilon) = \lambda + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \exp(-\lambda). \quad (11)$$

Tarkime,

$$\lambda(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) + i\sigma(\varepsilon) \quad (12)$$

šaknis, atitinkanti sąlygas $\tau(0) = 0$, $\sigma_0 = \sigma(0) = \frac{\pi}{2}$.

Parodysime, kad, a parametrai pereinant iš intervalo $(0; \frac{\pi}{2})$ į intervalą $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$, $\text{Re} \lambda(\varepsilon) = \tau(\varepsilon)$ keičia ženklą.

Iš tikrųjų, diferencijuodami tapatybę

$$P[\lambda(\varepsilon), \varepsilon] \equiv 0,$$

arba

$$\lambda(\varepsilon) + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \exp[-\lambda(\varepsilon)] \equiv 0 \quad (13)$$

pagal ε , gauname

$$\lambda'(\varepsilon) = - \frac{\exp[-\lambda(\varepsilon)]}{1 - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \exp[-\lambda(\varepsilon)]}. \quad (14)$$

Iš (14) išplaukia, kad

$$\tau'_0 = \frac{d}{d\varepsilon} \tau(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = -\text{Re} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{2}i\right)}{1 - \frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}i\right)} = \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}. \quad (15)$$

Taigi a parametrai pereinanti iš intervalo $(0; \frac{\pi}{2})$ į intervalą $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$ atsiranda dvi kompleksinės jungtinės šaknys $\lambda(\varepsilon)$ ir $\bar{\lambda}(\varepsilon)$ su teigiama realiaja dalimi.

4. NETIESINĖ ANALIZĖ

Nagrinėsime netiesinę diferencialinę lygtį

$$\dot{x}(t) + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \cdot [1 + x(t)] \cdot x[t - \exp(-ax(t))] = 0. \quad (16)$$

Tarkime, kad

$$x(\tau, \xi) = \xi \cos \frac{\pi}{2} \tau + \xi^2 x_2(\tau) + \xi^3 x_3(\tau) + \dots \quad (17)$$

$$\varepsilon(\xi) = b_2 \xi^2 + b_4 \xi^4 + \dots \equiv \Psi(\xi) \quad (18)$$

$$c(\xi) = c_2 \xi^2 + c_4 \xi^4 + \dots \quad (19)$$

Kadangi $\tau'_0 > 0$, tai (16) diferencialinei lygčiai galima taikyti diferencialinių lygčių su vėlavimu, priklausančiu nuo ieškomos funkcijos, periodinio sprendinio sudarymo metodiką [5]. Remiantis ja, (16) lygtyje keitiniais $t = (1 + c)\tau$ ($|c| < 1$) normuojame laiką ir įrašome (17)–(19) eilutes, be to, mūsų atveju $\sigma_0 = \pi/2$. Gautoje tapatybėje, prilyginę nuliui koeficientus esant ξ^2 ir ξ^3 , gausime diferencialines lygtis

$$x'_2(\tau) + \frac{\pi}{2} x_2(\tau - 1) = -\frac{\pi}{8} (a\pi + 2 \sin \pi\tau + a\pi \cos \pi\tau), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x'_3(\tau) + \frac{\pi}{2} x_3(\tau - 1) = & -(b_2 + \frac{\pi}{2} c_2) \sin \frac{\pi}{2} \tau - c_2 \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} \tau - \\ & - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \tau \cdot x_2(\tau) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \tau \cdot x_2(\tau - 1) - \\ & - \frac{a\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \tau \cdot \left[x'_2(\tau - 1) + \frac{\pi}{2} x_2(\tau) + \frac{\pi}{4} (2 - a) \cos^2 \frac{\pi}{2} \tau \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Iš (20) lygties gauname

$$x_2(\tau) = -\frac{1}{4}a\pi + A_{2s} \sin \pi\tau + A_{2c} \cos \pi\tau; \quad (22)$$

$$\text{čia} \quad A_{2s} = \frac{1-a\pi}{10}, \quad A_{2c} = \frac{4+a\pi}{20}. \quad (23)$$

Lygybėmis (22), (23) ir tiesinės nehomogeninės diferencialinės (21) lygties išsprendžiamumo sąlyga trigonometrinių daugianarių klasėje gauname, kad

$$b_2 = \frac{1}{80} [6\pi - 4 + 4\pi(1+\pi)a - 5\pi(3+\pi)a^2], \quad (24)$$

$$c_2 = \frac{1}{40\pi} [4 - 4\pi a + 5\pi(3+\pi)a^2]. \quad (25)$$

Funkcija $b_2(a)$ įgyja maksimumą taške

$$a_{\max} = \frac{2(1+\pi)}{5(3+\pi)}, \quad (26)$$

o lygi nuliui taške

$$a_0 = a_{\max} + \sqrt{a_{\max}^2 + \frac{2(3\pi-2)}{5\pi(3+\pi)}}. \quad (27)$$

Taigi iš atliktų skaičiavimų ir iš [5] išplaukia

2 teorema. Kai $0 < rh - \pi/2 = \varepsilon \ll 1$ ir $0 \leq a < a_0$, kur a_0 apibrėžtas (27) formule, tai (4) diferencialinė lygtis pakankamai mažoje pusiausvyros būsenos $N(t) \equiv N_0$ aplinkoje turi vienintelį (tikslumu iki poslinkių pagal laiką) stabilų periodinį sprendinį, kuris išreiškiamas

$$N(t) = N_0 \left[1 + \xi \cos \frac{\pi}{2} \tau + \xi^2 x_2(\tau) + O(\xi^3) \right]; \quad (28)$$

čia

$$\xi = \sqrt{\frac{rh - \pi/2}{b_2}}, \quad \tau = \frac{t}{h(1 + c_2 \xi^2)}, \quad (29)$$

o $x_2(\tau)$ apibrėžiama (22), (23) formulėmis.

Kai $a = 0,25$; $h = 0,001$ (s); $\varepsilon = 0,229$; $r = 1800$, tai $A_{2s} = 0,0215$; $A_{2c} = 0,2393$; $b_2 \approx 0,2729$; $c_2 \approx 0,0548$; $\xi \approx 0,9165$; $\tau \approx 955,9889t$; $N_0 = 1$ kW.

Tuomet (4) diferencialinės lygties stabilus periodinis sprendinys (28) yra

$$N(t) \approx 1 + 0,9165 \cos 1501,6638t + 0,8399 \cdot (-0,1963 + 0,0215 \sin 3003,3276t + 0,2393 \cos 3003,3276t), \quad (30)$$

o jo grafikas 4 paveiksle pavaizduotas ištisine kreive.

Periodinio (28), (29) sprendinio „harmoniško laipsni“ apibrėžia dydis

$$H = \frac{1}{20} \sqrt{5(4 + \pi^2 a^2)}. \quad (31)$$

Akivaizdu, kad funkcija $H(a)$, kai $0 \leq a < 1$, yra monotoniškai didėjanti. Tai reiškia, kad a parametru didėjant, (4) modelio periodinių sprendinių harmoniškumas mažėja. Kadangi, kai $a = 0$, (4) modelis tampa (3) modeliu, tai (4) modelio periodiniai sprendiniai mažiau harmoningi, negu (3) modelio periodiniai sprendiniai [5, 6].

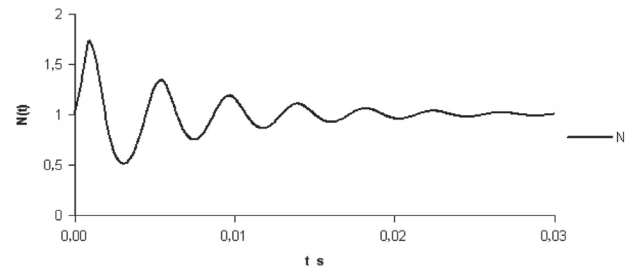
5. SKAITINIS EKSPERIMENTAS

Sakykime, kad netiesinę (4) diferencialinę lygtį aprašo modelis, kuris sukurtas modeliavimo paketu MODEL MAKER [8].

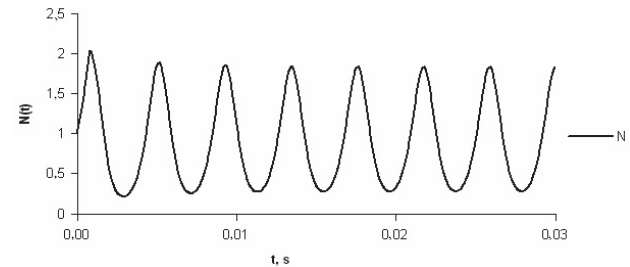
Įrašius parametų $a = 0,25$, $h = 0,001$ s, $N_0 = 1$ reikšmes ir keičiant koeficientą r , analizuojami (4) lygties sprendinių stabilumo klausimai. Kai $r = 1300 \in D_0$, tai (4) lygties sprendinys yra asimptotiškai stabilus ir artėja prie pusiausvyros būsenos $N(t) \equiv N_0$, kai $t \rightarrow \infty$ (2 pav.).

Padidinę koeficientą iki $r = 1800 \in D_2$, gauname (4) lygties stabilų periodinį sprendinį (3 pav.).

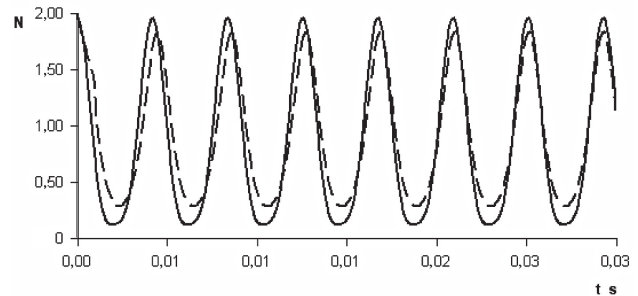
Norėdami palyginti (4) lygties stabilių periodinių sprendinių, nubrėžtų esant toms pačioms parametų reikšmėms, remdamiesi artutine (30) formule ir skaitiniu eksperimentu (punktyrinė linija), abu grafikus brėžiame vienoje koordinatinių sistemoje (4 pav.).



2 pav. Lygties (4) asimptotiškai stabilus sprendinys, kai $a = 0,25$, $h = 0,001$ s, $N_0 = 1$, $r = 1300$



3 pav. Lygties (4) stabilus periodinis sprendinys, kai $a = 0,25$, $h = 0,001$ s, $N_0 = 1$, $r = 1800$



4 pav. Lygties (4) stabilių periodinių sprendinių palyginimas, kai $a = 0,25$, $h = 0,001$ s, $N_0 = 1$, $r = 1800$

6. IŠVADOS

Iš bazinio branduolinio reaktoriaus dinamikos modelio išskirta jo modifikacija su vėluojančiu grįžtamoju ryšiu, priklausančiu nuo reaktoriaus galios. D -skaidymo metodu nustatyta (4) modelio asimptotinio stabilumo sritis $D_0 = (0; \frac{\pi}{2})$. Remiantis bifurkacijų

teoriija nustatyta sritis $D_2 = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$, kurioje egzistuoja (4) modelio vienintelis vieno dažnio artutinis stabilus periodinis sprendinys, ir sudaryta jo analizinė išraiška. Naudojantis modeliavimo paketu MODEL MAKER D_0 srityje aptiktas asimptotiškai stabilus sprendinys (2 pav.), o D_2 srityje – stabilus periodinis sprendinys (3 pav.). Sukonstruotas modelio artutinis stabilus periodinis sprendinys pakankamai gerai sutampa su skaitinio eksperimento rezultatais (4 pav.).

Gauta 2006 06 20
Priimta 2007 03 23

Literatūra

1. Митенков Ф. М. Актуальные задачи динамики энергетических реакторов. Вопросы атомной науки и техники // Физика и техника ядерных реакторов. 1981. Т. 6(19). С. 3–5.
2. Горяченко В. Д., Золотарев С. Л., Колчин В. А. Исследование динамики ядерных реакторов качественными методами. Москва: Энергоатомиздат, 1988. 168 с.
3. Швитра Д., Бучис К. Роль запаздывания в динамике ядерных реакторов // Литовский физический журнал. 1999. Т. 39(6). С. 451–455.
4. Колесов Ю. С., Швитра Д. И. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979. 147 с.
5. Швитра Д. И. Динамика физиологических систем. Вильнюс: Мокслас, 1989. 169 с.
6. Bučys K. Branduolinio reaktoriaus modelio su vėluojančiu grįžtamuoju ryšiu, priklausančiu nuo reaktoriaus galios, sprendinių stabilumo tyrimas // Jūra ir aplinka. 2003. Т. 1(8). Р. 77–82.
7. Bučys K., Švitra D. Reaktoriaus dinamikos modelio analizė // Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai. 1999. Т. 3. Р. 336–341.
8. Model Maker 3, User's Guide, Cherwell Scientific Publishing Limited.

Kostas Bučys

STABILITY OF SOLUTIONS OF A REACTOR MODEL IN WHICH TIME DELAY DEPENDS ON POWER

Summary

The problem of the stability of the reactor using a nonlinear mathematical model is analysed. By the method of D -decomposition, the linear analysis is done, and the region of asymptotic stability D_0 and the region D_2 in which a stable periodical solution appears are obtained. A nonlinear analysis of the model was done employing the theory of bifurcations. The obtained approximate periodical solution of the model coincides well enough with the results of the numerical experiments.

Key words: nuclear reactor, differential equation, retardation, periodical solution, model, root

Костас Бучис

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ РЕАКТОРА, В КОТОРОЙ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ЗАВИСИТ ОТ МОЩНОСТИ

Резюме

Проблема стабильности ядерного реактора исследуется с помощью нелинейной математической модели. Линейный анализ модели, выполненный с помощью метода D -разбиения, позволил выделить область асимптотической стабильности D_0 и область D_2 , в которой появляется стабильное периодическое решение. Нелинейный анализ модели произведён методом теории бифуркаций. Полученное периодическое решение хорошо согласуется с результатами численных экспериментов.

Ключевые слова: ядерный реактор, дифференциальное уравнение, запаздывание, периодическое решение, модель, корень